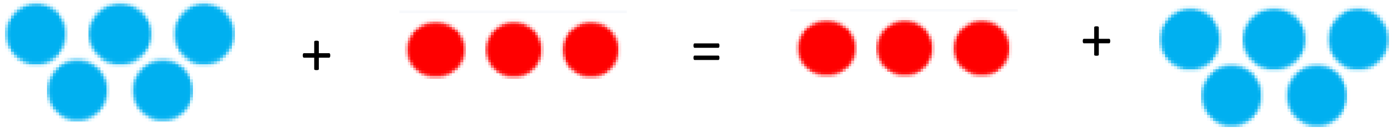
Simplifier les calculs en transformant les nombres : regards sur des propriétés de l'addition et de la soustraction

Agnès BATTON
INSPE Versailles – LDAR
pour le Groupe Départemental Maths 95

Commutativité de l’addition :
représentation avec des quantités

$$5 + 3 = 3 + 5$$

Exemple de calcul



Représentation contextualisée sur des quantités

Extrait m@gistère

Ce qu’on peut dire avec les élèves :

« Dans une addition, on peut échanger l’ordre des nombres (l’ordre des termes) sans changer le résultat.»

Dit autrement

Énoncé générique

Ce qu’on peut dire avec les élèves :

« Dans une addition, on peut échanger l’ordre des nombres, on peut les déplacer sans changer le résultat. »

Commutativité de l’addition :
représentation avec des unités uniformes alignées

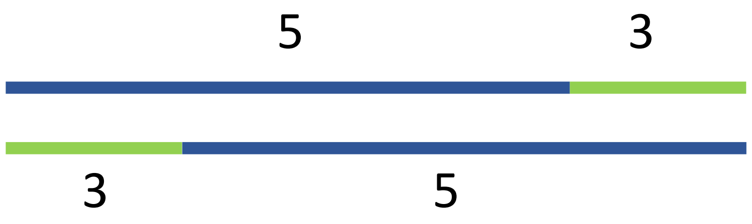
$\color{#00b0f0}{5} + \color{#00b050}{3} = \color{#00b050}{3} + \color{#00b0f0}{5}$

Ce qu’on peut dire avec les élèves :
« Dans une addition, on peut échanger l’ordre des nombres.
On peut les déplacer sans changer le résultat, sans changer la quantité totale. »

Commutativité de l’addition :
représentation avec des longueurs

$5 + 3 = 3 + 5$

Exemple de calcul



Représentation contextualisée sur des longueurs

Représentation générique sur des longueurs

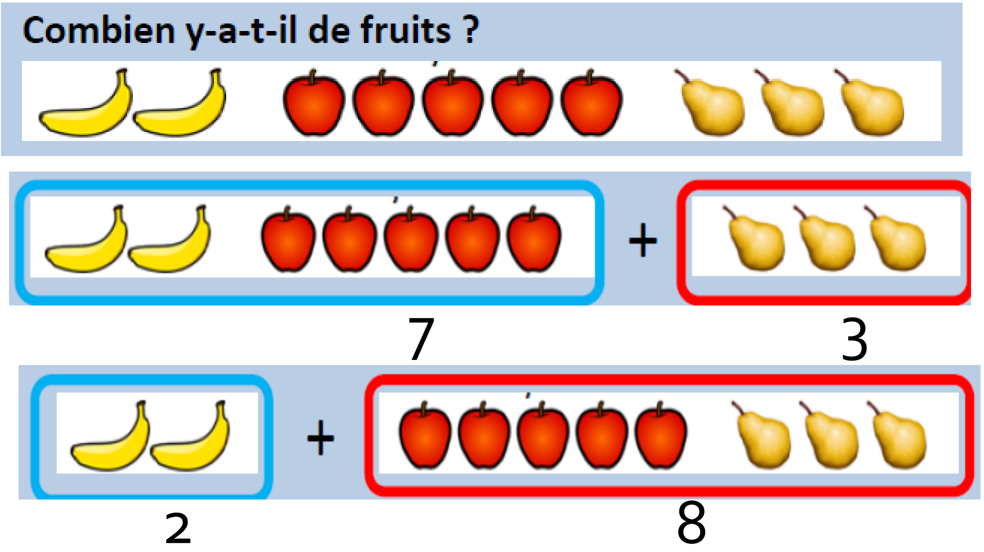
Énoncé générique

Ce qu’on peut dire avec les élèves : « Dans une addition, on peut échanger l’ordre des nombres. On peut les déplacer sans changer le résultat, sans changer la quantité totale. »

Associativité de l'addition :
représentation avec des unités

$2 + 5 + 3 =$

Exemple de calcul



Représentation contextualisée sur des quantités

$$2 + 5 + 3 = 2 + 5 + 3$$

$$\underbrace{2 + 5}_{7} + 3 = 2 + \underbrace{5 + 3}_{8}$$

$$7 + 3 = 2 + 8$$

Écriture à l'aide d'un « arbre à calcul »

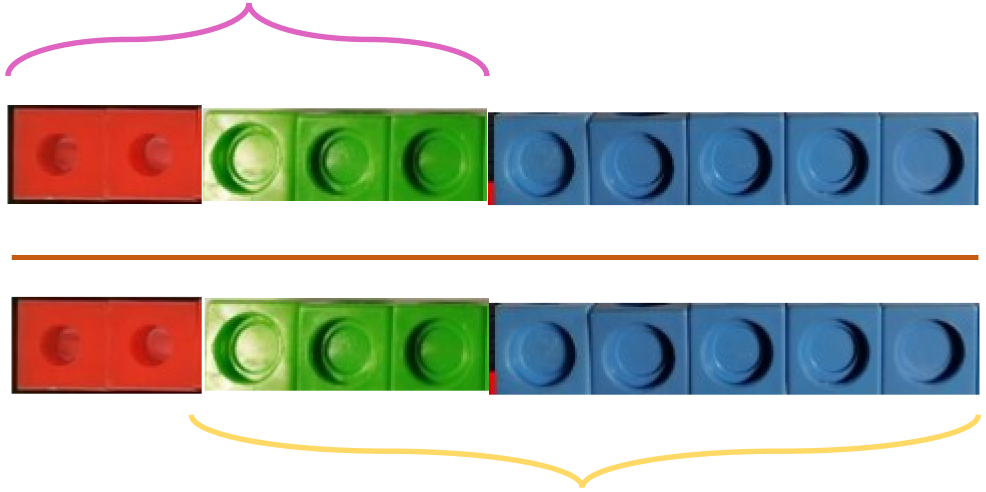
Extrait m@gistère

Un élève peut dire, par exemple : « Dans une addition, on peut regrouper les nombres (termes) comme on veut ».

Énoncé(s) générique(s)

"**Quand on additionne trois nombres, on peut commencer par additionner les deux premiers nombres ou les deux suivants.**
(Carpenter et al., 2003, p. 108)

Associativité de l'addition :
représentation avec des unités uniformes alignées



$$2 + 3 + 5 = 2 + 3 + 5$$

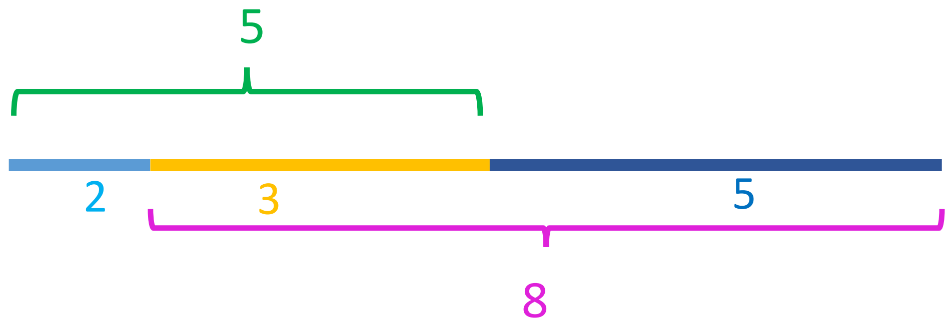
$$5 + 5 = 2 + 8$$

« Dans une addition, on peut échanger l'ordre des opérations sans changer le résultat (commencer par ajouter les deux premiers nombres ou les deux derniers nombres). »

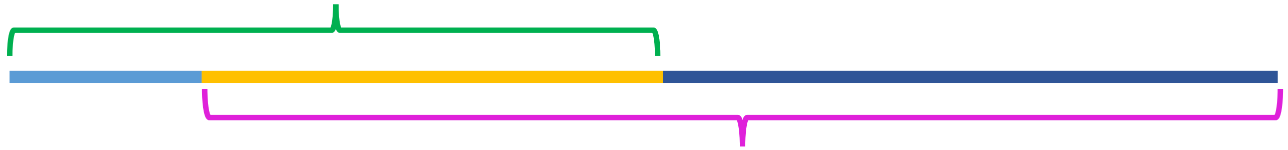
Associativité de l'addition :
representation avec des longueurs

$(2+3) + 5 = 2 + (3+5)$

Exemple d'écriture en ligne avec parenthèses (cycle 3)



Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

Énoncé générique

"Quand on additionne trois nombres, on peut commencer par additionner les deux premiers nombres ou les deux suivants." **(Carpenter et al., 2003, p. 108)**

Commutativité et associativité sont souvent associées en calcul mental

Calcul 13 + 5 + 27

Ici, on cherche à additionner des nombres « ronds » pour calculer sur moins de chiffres en utilisant les compléments à 10.

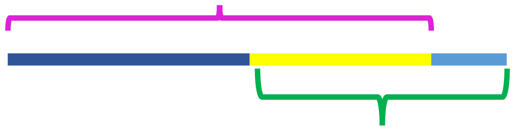
13 + 5 + 27	On **repère** les compléments à 10.
= 5 + 13 + 27	On échange l'ordre des termes pour réunir les compléments (commutativité).
= 5 + (13 + 27)	On les associe (associativité).
= 5 + (10 + 3 + 27) = 5 + (1D + 3D) = 5 + 4D	On calcule avec les compléments puis on peut convertir pour calculer en Unités de Numération (ou en utilisant la position).
= 5 + 40 = 45	On convertit 4dizaines en 40 pour calculer.

Remarque : avec usage d'arbre à calcul dès le cycle 2, de parenthèses en cycle 3

Dans les diapositives suivantes, pour faciliter les calculs, on choisit de transformer les nombres afin d'ajouter ou soustraire des nombres « ronds » (multiples de 10…) pour calculer sur « moins de chiffres » et donc utiliser des faits numériques connus.

Les calculs sur les nombres peuvent être représentés par des relations sur des quantités, des longueurs (bandes de couleurs) …

Ex :



Compensation entre les deux termes d'une addition : exemple de situation

Dès le CP

Marine et Lou vont ensemble à la bibliothèque. Lou prend 3 livres et Marine en prend 7. Arrivées devant le bureau d'emprunt, la bibliothécaire leur indique qu'elles ne peuvent pas prendre plus de 5 livres chacun.
Que peuvent-elles faire ?
Ont-elles toujours le même nombre de livres en tout ?

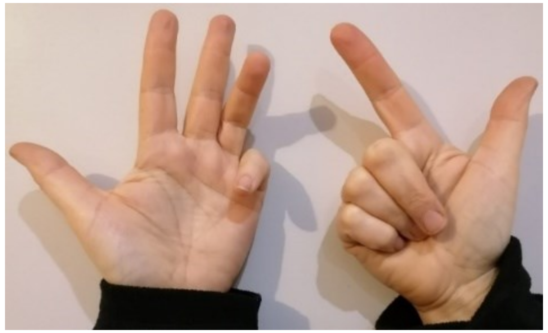
Marine peut donner 2 livres à Lou. Elle en avait 7, il lui en restera 5.
Lou en avait 3, elle en aura donc 2 de plus soit 5 livres.
Elles ont ainsi 5 livres chacun mais toujours le même total de livres.

Propriété : On ne change pas la valeur d'une addition si on ajoute à un des nombres ce qu'on l'on retire à l'autre ; on garde alors la quantité totale.

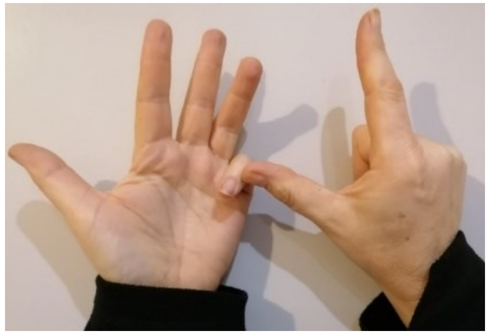
Compensation entre les deux termes d'une addition :
exemple de représentation digitale

En GS-CP

Si je sais que 5 et 1 ça fait 6 et que je veux savoir combien vaut 4 et 2.
Comment faire pour savoir le résultat sans tout recompter ?



J'ai quatre et deux.
Je vois qu'il manque un sur une main pour faire cinq.



Je prends un à deux pour le donner à quatre et compléter ma main à cinq.

Et donc j'ai cinq et un, que je connais, c'est six.

Représentation contextualisée sur une quantité discrète

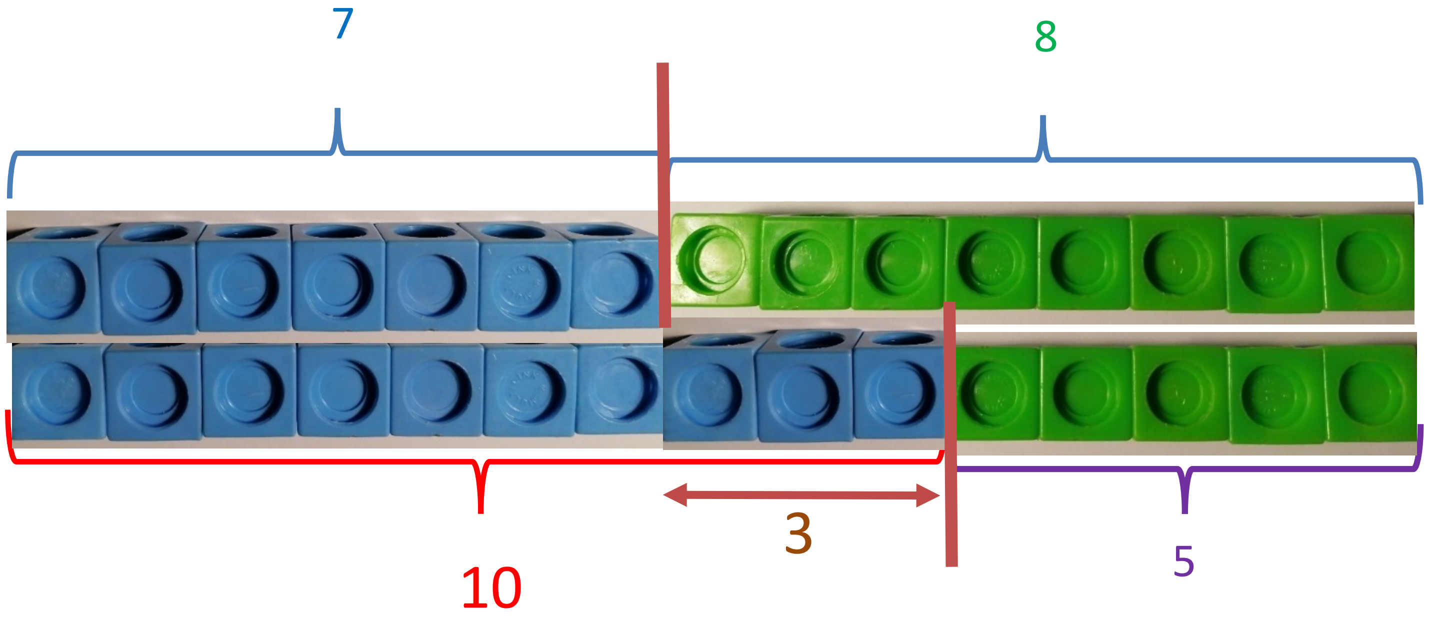
Quatre et deux
(je peux enlever un à deux pour le donner à quatre)
c'est comme cinq et un, c'est six.

Étayage langagier

Compensation entre les deux termes d'une addition : représentation avec des unités uniformes alignées

$$7 + 8 = (7 + 3) + (8 - 3) = 10 + 5$$

Exemple de calcul



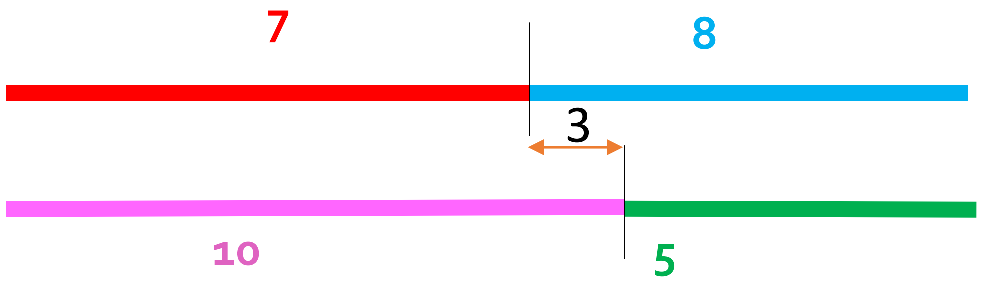
Représentation contextualisée sur des unités

Propriété : On ne change pas la valeur d'une addition si on ajoute à un des nombres ce qu'on l'on retire à l'autre ; on garde alors la quantité totale.

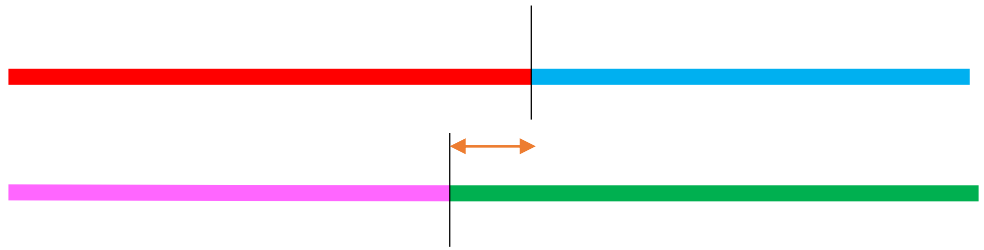
Compensation entre les deux termes d'une addition : représentation-longueur

$$7 + 8 = (7 + 3) + (8 - 3) = 10 + 5 = 15$$

Exemple de calcul et de procédure



Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

Énoncé générique

Propriété : On ne change pas la valeur d'une addition si on ajoute à un des nombres ce qu'on l'on retire à l'autre; on garde alors la quantité totale.

Deux procédures / deux propriétés pour une même trace : 7 + 8 = 10 + 5

Associativité de l’addition / Compensation entre deux termes

7 + 8

7 + 3 + 5

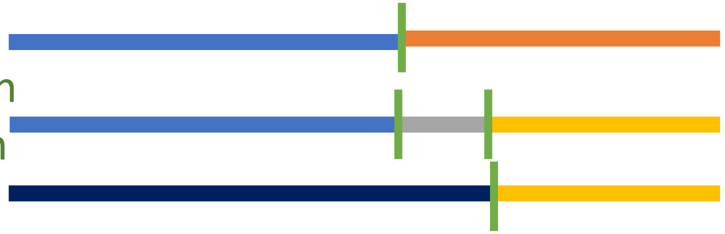
10 + 5

$7_{+3} + 8_{-3}$

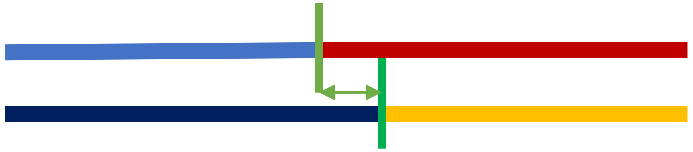
= 10 + 5

deux temps :

décomposition
recomposition

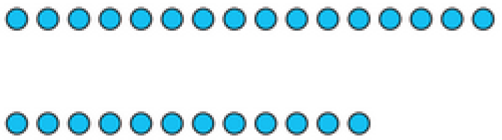


simultané

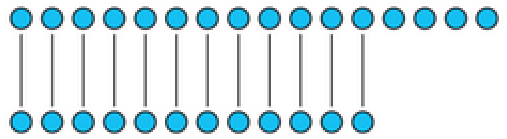


Trois points de vue sur la soustraction

Deux collections, deux nombres…



… et leur différence :



Mais la différence, c'est aussi ce qu'il faut ajouter au petit nombre pour obtenir le grand :

C'est aussi ce qui reste quand on retire le petit nombre au grand :

D'où trois types de procédures :

- celles qui cherchent à trouver l'écart (la « différence »)

- celles qui complètent (en avant)

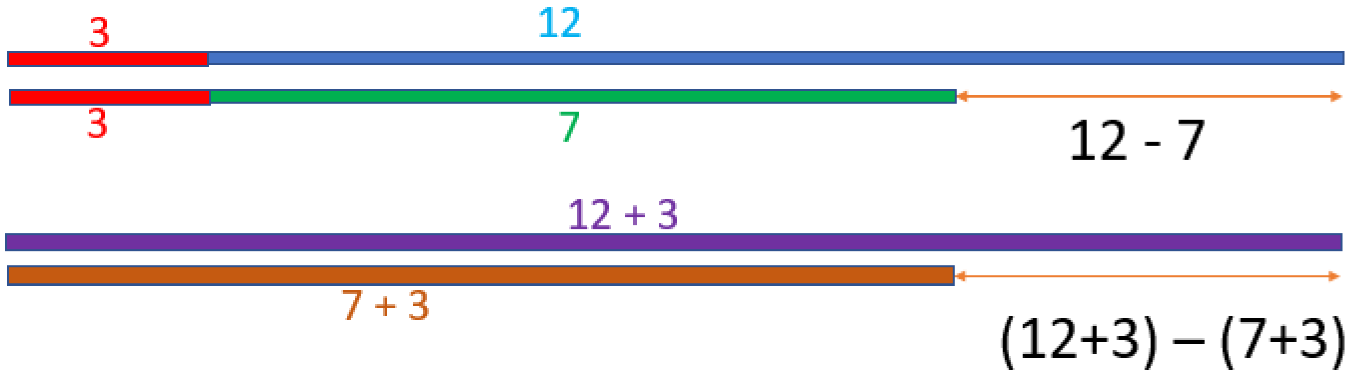
- celles qui retirent (en arrière)

Extrait adapté du livre du maître de J'apprends les Maths, Brissiaud, CE1, éd. Retz

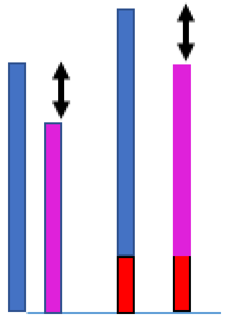
Compensation entre les deux termes d'une soustraction
ou « conservation des écarts » : représentation-longueur

$12 - 7 = (12 + 3) - (7 + 3) = 15 - 10 = 5$

Exemple de calcul et de procédure



Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

Énoncé générique

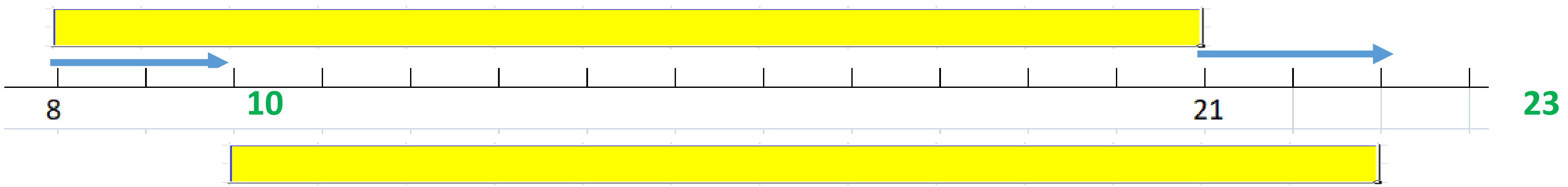
Propriété : On ne change pas le résultat d'une soustraction si on ajoute ou l'on retire aux deux nombres une même valeur .
On garde le même écart.

Compensation entre les deux termes d’une soustraction

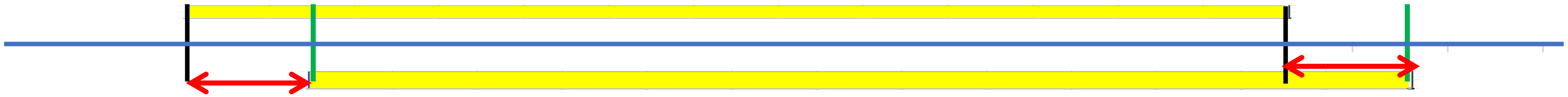
ou « conservation des écarts » : représentation-nombres repères sur droite graduée

$$21 - 8 = (21 + 2) - (8 + 2) = 23 - 10 = 13$$

Exemple de calcul et de procédure



Représentation contextualisée sur droite graduée



Représentation générique sur droite non graduée

Énoncé générique

Propriété : On ne change pas le résultat d’une soustraction si on ajoute ou l’on retire aux deux nombres une même valeur . **On garde le même écart.**

Compensation (interne) entre les deux termes d'une soustraction exemple de situation

Ewelle à 20 ans, Aksel a 16 ans. Ils ont quatre ans d'écart.
Que se passera-t-il dans cinq ans ? Auront-ils le même écart d'âge ?
Explique de deux manières.
Était-ce vrai il y a deux ans ? N'importe quand ?

Dans 5 ans, Aksel aura 21 ans et Ewelle en aura 25. Ils auront 4 ans d'écart.
Il y a deux ans, Ewelle avait 18 ans et Aksel en avait 14. Ils avaient 4 ans d'écart.
L'écart entre leurs âges ne change pas car le nombre d'années des deux est modifié de la même façon.

Propriété : On ne change pas le résultat d'une soustraction si on ajoute ou l'on retire aux deux nombres une même valeur . **On garde le même écart.**

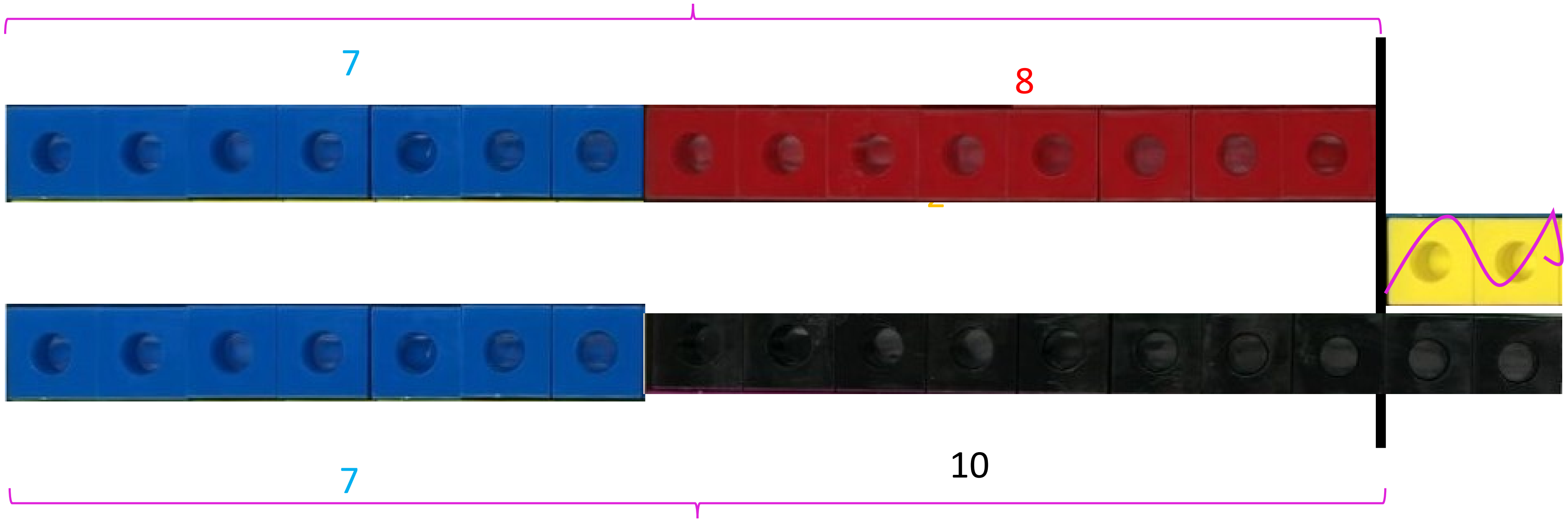
Compensations externes

Transformation-ajustement sur un terme dans une addition :
Représentation sur des unités uniformes alignées

$7 + 8 = 7 + 10 - 2$

Exemple de calcul et de procédure

Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

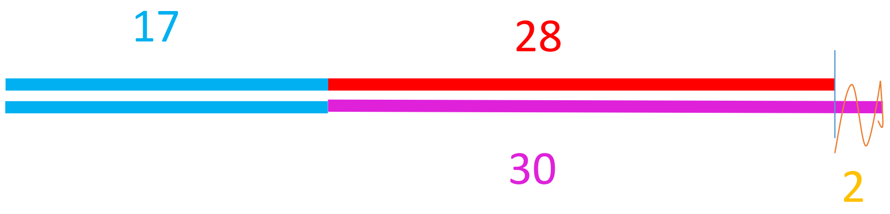
Énoncé générique

Propriété : La valeur d’une somme ne change pas si, lorsqu’on **transforme** un des termes en lui ajoutant un nombre, on ajuste pour compenser en soustrayant le même nombre au résultat.
Si j’ajoute trop, je dois enlever pour compenser et trouver le résultat.

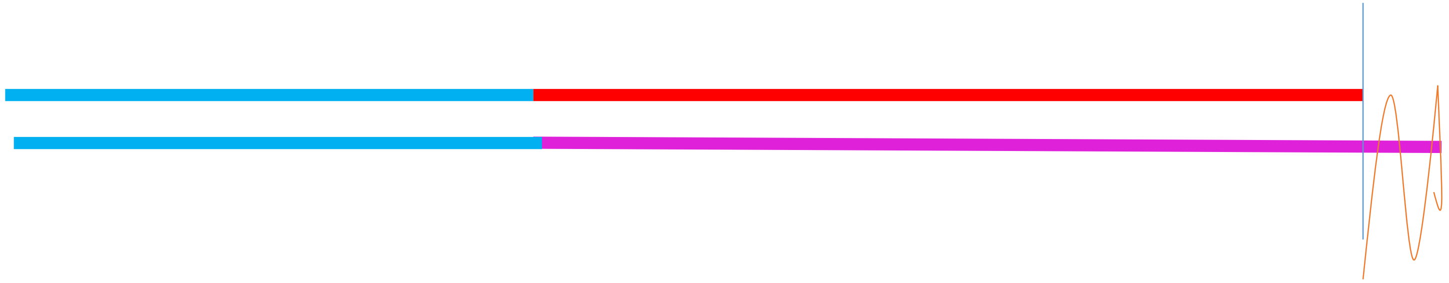
Transformation-ajustement sur un terme dans une addition : représentation-longueur

$17 + 28 = 17 + 30 - 2$

Exemple de calcul et de procédure



Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

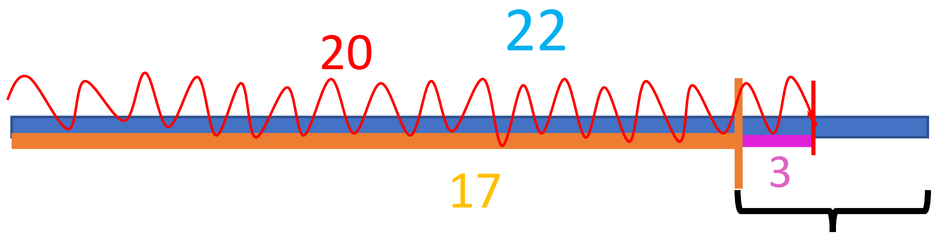
Énoncé générique

Propriété : La valeur d'une somme ne change pas si, lorsqu'on **transforme** un des termes en lui ajoutant un nombre, on ajuste pour compenser en soustrayant le même nombre au résultat.
Si j'ajoute trop, je dois enlever pour compenser et trouver le résultat.

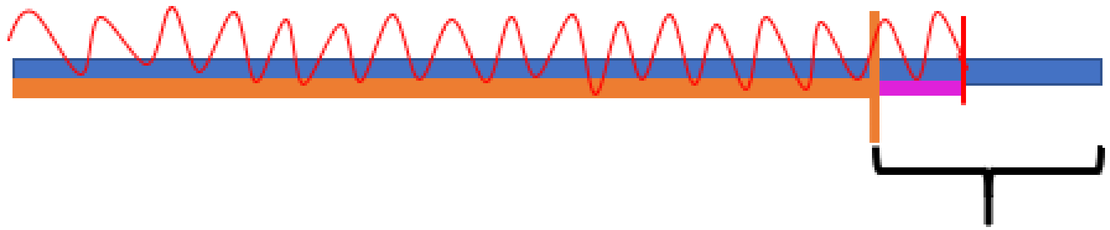
Transformation-ajustement sur le plus petit nombre dans une soustraction : représentation sur des longueurs

$22 - 17 = 22 - 20 + 3$

Exemple de calcul



Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

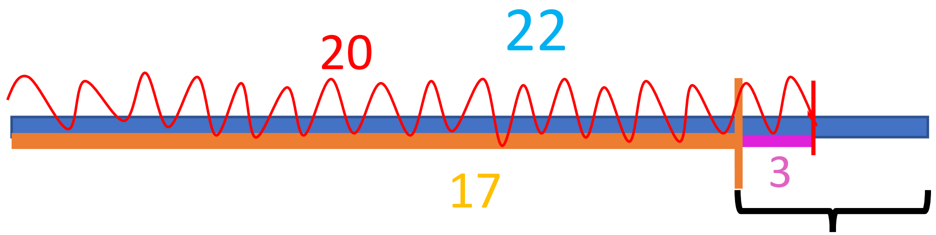
Énoncé générique

Propriété : La valeur d'une différence ne change pas si, lorsqu'on **transforme** le deuxième terme en lui ajoutant un nombre, on **ajuste** pour compenser en ajoutant le même nombre.
Si je soustrais trop, je dois ajouter pour compenser et trouver le résultat.

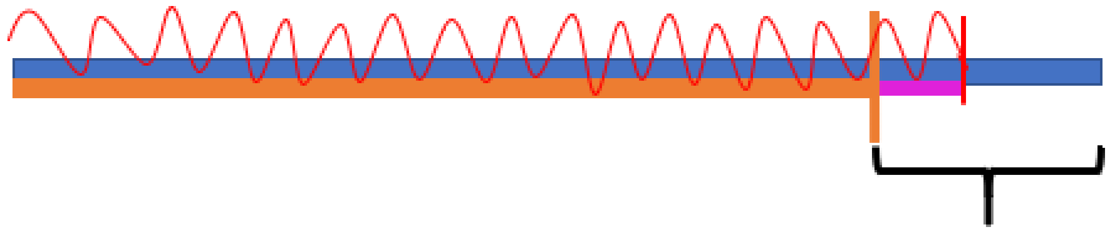
Transformation-ajustement sur le plus petit nombre dans une soustraction : représentation sur des longueurs

$$22 - 17 = 22 - 20 + 3$$

Exemple de calcul



Représentation contextualisée sur des longueurs



Représentation générique sur des longueurs

Énoncé générique

Propriété : La valeur d'une différence ne change pas si, lorsqu'on **transforme** le deuxième terme en lui ajoutant un nombre, on **ajuste** pour compenser en ajoutant le même nombre.
Si je soustrais trop, je dois ajouter pour compenser et trouver le résultat.

synthèse

Des liens indispensables avec la numération

Ajouter 10, ajouter des dizaines

28 + 10 = 28 + 1 Dizaine = (2+1) Dizaines 8u = 38

28 + 30 = 28 + 3 Dizaines = (2+3)Dizaines 8u = 58

Compléter à la dizaine supérieure …

Nécessite la connaissance

- des compléments à dix
- de la dizaine supérieure à un nombre donné

Soustraction par compléments successifs

Nécessite la connaissance :

- de la dizaine supérieure à un nombre donné (numération)
- **des compléments à 10**

ex : 15 – 7 c'est aussi 7 + ? = 15 ; 7 + 3 = 10 ; 10 + 5 = 15

utiliser le complément à 10

ex : 30 – 11 = ? C'est aussi : 11 + ? = 30 ; 10 + 1 + 9 = 20 ; 20 + 10 = 30

dizaine sup / compt dix

Soustraction par retraits successifs (ou retirer par partie)

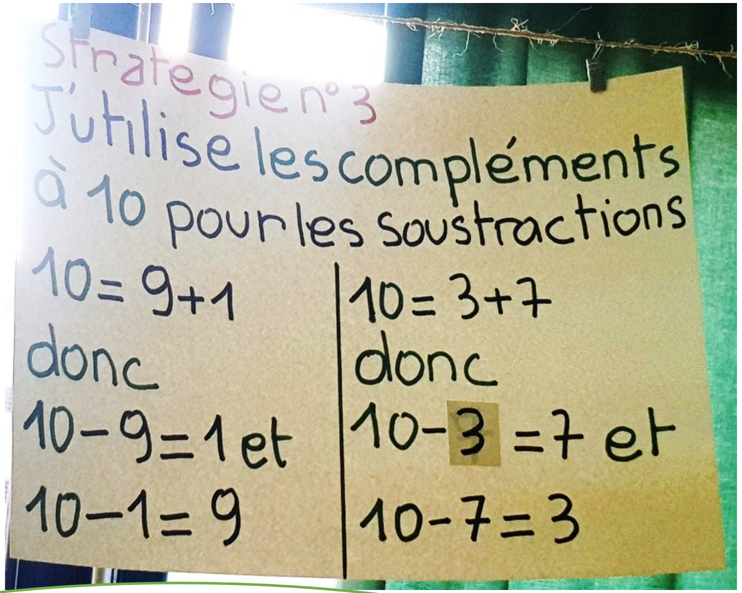
Nécessite la connaissance :

- de la dizaine inférieure à un nombre donné (numération)
- **des compléments à 10**

ex : 15 – 7 = 15 – 5 – 2 = 10 – 2 (retirer un nombre à un chiffre)

pour descendre à 10 utiliser le complément à 10

ex : 30 – 11 = 30 – 10 – 1 = 20 – 1 = 10 + 10 – 1 = 10 + 9



Cela nécessite donc des activités décrochées ritualisées d'encadrement entre dizaine inférieure et dizaine supérieure et de recherche d'écart à ces dizaines

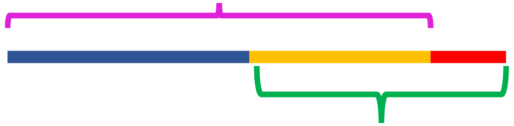
Dans une addition, sans changer le résultat, je peux …

Changer l'ordre des nombres

7 + 19 + 3 = 7 + 3 + 19

Associer pour ajouter les nombres dans l'ordre qu'on veut

(19 + 7) + 3 = 19 + (7 + 3)



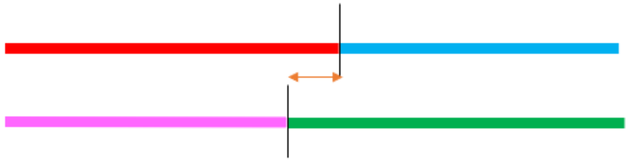
7 + 19 + 3 = 19 + (7 + 3)
= 19 + 10
= 29

Compenser entre deux termes

Retirer à un nombre ce qu'on **ajoute** à l'autre

$\underset{+1}{24} + \underset{-1}{26}$

= 25 + 25 = 50



Décomposer un des nombres puis **associer** pour **compléter** l'autre

19 + 3 = 19 + (1 + 2)
= (19 + 1) + 2
= 20 + 2

Arrondir un ou plusieurs nombres, calculer puis **ajuster** en retirant pour **compenser**

$15 + \underset{+2}{28} = 15 + 30 - \underset{-2}{2}$

Dans une soustraction, sans changer le résultat je peux …

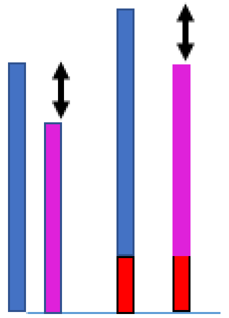
Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux termes

(conservation des écarts)

22 – 17 = (22 + 3) – (17+3)

= 25 - 20

220 – 170 = 22D – 17 D = …☺

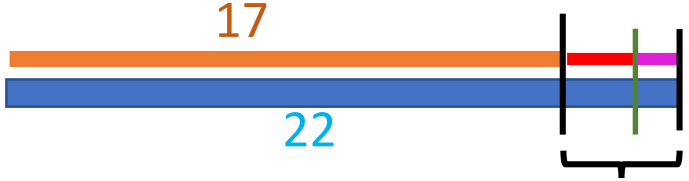


Compléter par parties le plus petit nombre pour aller au grand :

ex: 22 – 17

17 + 3 =**20** // 20 + 2 = 22

3 + 2 = 5 donc 22 – 17 = 5

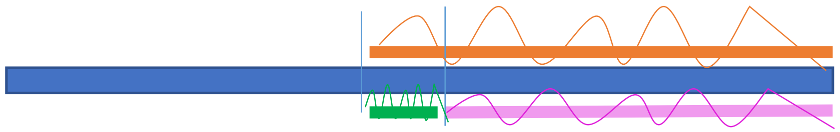


Retirer par parties

22 – 17 = 22 – 2 – 15 = 20 - 15

ou

22 – 17 = 22 – 10 – 7 = 12 - 7



Arrondir le nombre que j'enlève (plus facile), calculer puis **ajuster** pour compenser en ajoutant ce que j'ai enlevé en trop.

22 - 17 = 22 – 20 + 3